Ejercicio Cambio de Base

DAN:

Considerense las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$:

$S_1 = \{u_1 = (1, -2), u_2 = (3, -4)\}$ y $S_2 = \{v_1 = (1, 3), v_2 = (3, 8)\}$

PIDEN:

$a)$ Encontrar las coordenadas de un vector arbitrario $v = (a, b)$ relativas a la base $S_2 = \{v_1, v_2\}$.

$b)$ Determinar la matriz de cambio de base Q desde S_2 hasta S_1.

DESARROLLO

$a)$ Sea $v = x v_1 + y v_2$ para escalares desconocidos x ee y

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

Tambien lo podemos expresar como:

$x + 3y = a$

$3x + 8y = b$

Oo asi:

$x + 3y = a$

$-y = b - 3a$

Resolvemos para x ee y, llegamos aa $x = -8a + 3b$, $y = 3a - b$. Asi,

$(a, b) = (-8a + 3b)v_1 + (3a - b)v_2$

O lo expresamos asi:

$[(a, b)]S_2 = [-8a + 3b, 3a - b]^T$

$b)$ Usamos $a)$ para escribir los vectores u_1 yy u_2 de la base S_1 como combinacion lineal de los vectores v_1 yy v_2 de S_2:

$u_1 = (1, -2) = (-8 - 6)v_1 + (3 + 2)v_2 = -14v_1 + 5v_2$

$u_2 = (3, -4) = (-24 - 12)v_1 + (9 + 4)v_2 = -36v_1 + 13v_2$

Escribimos u_1 yy u_2 de S_2 como columnas dentro de una matriz obteniendo:

$Q = \begin{pmatrix} -14 & -36 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$